

Transformadas de Riesz asociadas al operador de Schrödinger

Pablo Quijano

IMAL - CONICET - UNL

Septiembre de 2016

El operador de Schrödinger

Consideramos el operador de Schrödinger en $\mathbb{R}^d$, con $d \geq 3$

$$\mathcal{L} = -\Delta + V,$$

donde $V \geq 0$ satisface, para $q > \frac{d}{2}$,

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B V(y)^q dy \right)^{1/q} \leq \frac{C}{|B|} \int_B V(y) dy.$$

El operador de Schrödinger

Consideramos el operador de Schrödinger en $\mathbb{R}^d$, con $d \geq 3$

$$\mathcal{L} = -\Delta + V,$$

donde $V \geq 0$ satisface, para $q > \frac{d}{2}$, ($V \in RH_q$)

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B V(y)^q dy \right)^{1/q} \leq \frac{C}{|B|} \int_B V(y) dy.$$

El operador de Schrödinger

Consideramos el operador de Schrödinger en $\mathbb{R}^d$, con $d \geq 3$

$$\mathcal{L} = -\Delta + V,$$

donde $V \geq 0$ satisface, para $q > \frac{d}{2}$,

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B V(y)^q dy \right)^{1/q} \leq \frac{C}{|B|} \int_B V(y) dy.$$

Ejemplos: $V \equiv 0$, $V \equiv \text{cte}$, $V(x) = |x|^2$, $V(x) = |x|^{-2\sigma}$

La función de radio crítico

Dado un potencial $V \in RH_q$, $q > \frac{d}{2}$

$$\rho(x) = \sup \left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V \leq 1 \right\}$$

La función de radio crítico

Dado un potencial $V \in RH_q$, $q > \frac{d}{2}$

$$\rho(x) = \sup \left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V \leq 1 \right\}$$

Si $V \not\equiv 0$, $0 < \rho(x) < \infty$

La función de radio crítico

Dado un potencial $V \in RH_q$, $q > \frac{d}{2}$

$$\rho(x) = \sup \left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V \leq 1 \right\}$$

Si $V \not\equiv 0$, $0 < \rho(x) < \infty$

Ejemplos:

$V \equiv 0$	$\rho \equiv \infty$
$V \equiv cte$	$\rho(x) \equiv 1$
$V(x) = x ^2$	$\rho(x) = (1 + x)^{-1}$

La solución fundamental

$$\mathcal{L}u = f$$

La solución fundamental

$$\mathcal{L}u = f$$

$$u(x) = \int \Gamma(x, y) f(y) dy$$

La solución fundamental

$$\mathcal{L}u = f$$

$$u(x) = \int \Gamma(x, y) f(y) dy$$

No se conoce una forma explícita para $\Gamma(x, y)$

La solución fundamental

$$\mathcal{L}u = f$$

$$u(x) = \int \Gamma(x, y) f(y) dy$$

No se conoce una forma explícita para $\Gamma(x, y)$

Estimaciones:

1. Si $V \in RH_{d/2}$, $|\Gamma(x, y)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N} \frac{1}{|x-y|^{d-2}}$
2. Si $V \in RH_d$, $|\nabla \Gamma(x, y)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N} \frac{1}{|x-y|^{d-1}}$

Transformadas de Riesz-Schrödinger

Transformadas de RS de orden uno: $\mathcal{R} = \nabla \mathcal{L}^{-1/2}$ y $\mathcal{R}^* = \mathcal{L}^{-1/2} \nabla$

Transformadas de Riesz-Schrödinger

Transformadas de RS de orden uno: $\mathcal{R} = \nabla \mathcal{L}^{-1/2}$ y $\mathcal{R}^* = \mathcal{L}^{-1/2} \nabla$

Transformadas de RS de orden dos: $\mathcal{R}_2 = \nabla^2 \mathcal{L}^{-1}$ y $\mathcal{R}_2^* = \mathcal{L}^{-1} \nabla^2$

Transformadas de Riesz-Schrödinger

Transformadas de RS de orden uno: $\mathcal{R} = \nabla \mathcal{L}^{-1/2}$ y $\mathcal{R}^* = \mathcal{L}^{-1/2} \nabla$

Transformadas de RS de orden dos: $\mathcal{R}_2 = \nabla^2 \mathcal{L}^{-1}$ y $\mathcal{R}_2^* = \mathcal{L}^{-1} \nabla^2$

Mediante cálculo funcional

$$\mathcal{L}^{-1/2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (-i\tau)^{-1/2} (\mathcal{L} + i\tau)^{-1} d\tau$$

Transformadas de Riesz-Schrödinger

Transformadas de RS de orden uno: $\mathcal{R} = \nabla \mathcal{L}^{-1/2}$ y $\mathcal{R}^* = \mathcal{L}^{-1/2} \nabla$

Transformadas de RS de orden dos: $\mathcal{R}_2 = \nabla^2 \mathcal{L}^{-1}$ y $\mathcal{R}_2^* = \mathcal{L}^{-1} \nabla^2$

Mediante cálculo funcional

$$\mathcal{L}^{-1/2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (-i\tau)^{-1/2} (\mathcal{L} + i\tau)^{-1} d\tau$$

$$\nabla \mathcal{L}^{-1/2} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (-i\tau)^{-1/2} \nabla_1 \Gamma(x, y, \tau) d\tau \right] f(y) dy$$

Transformadas de Riesz-Schrödinger

Transformadas de RS de orden uno: $\mathcal{R} = \nabla \mathcal{L}^{-1/2}$ y $\mathcal{R}^* = \mathcal{L}^{-1/2} \nabla$

Transformadas de RS de orden dos: $\mathcal{R}_2 = \nabla^2 \mathcal{L}^{-1}$ y $\mathcal{R}_2^* = \mathcal{L}^{-1} \nabla^2$

Mediante cálculo funcional

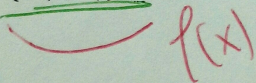
$$\mathcal{L}^{-1/2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (-i\tau)^{-1/2} (\mathcal{L} + i\tau)^{-1} d\tau$$

$$\nabla \mathcal{L}^{-1/2} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (-i\tau)^{-1/2} \nabla_1 \Gamma(x, y, \tau) d\tau \right] f(y) dy$$

$$\mathcal{R} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(x, y) f(y) dy$$

Idea

Finally, we note that, to study $(-\Delta + V)^{i\gamma}$ and $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$, by functional calculus, we actually need to deal with $\Gamma(x, y, \tau)$ and $\nabla\Gamma(x, y, \tau)$ where $\Gamma(x, y, \tau)$ is the fundamental solution for $-\Delta + V(x) + i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. Moreover, if $V \in B_q$, $n/2 \leq q < n$, we do not have pointwise estimates for $\nabla\Gamma(x, y, \tau)$. But, these difficulties are overcome by our basic idea that, the operators associated with $-\Delta + V$ can be viewed as a perturbation of the corresponding operators associated with $-\Delta$ in the scale less than $\{m(x, V)\}^{-1}$.



$f(x)$

L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials
Z. Shen, 1995.

Comparación con Riesz "Clásicas"

Consideramos $R_0 = \nabla(-\Delta)$ la transformada de Riesz *clásica* y K_0 su núcleo asociado.

Comparación con Riesz "Clásicas"

Consideramos $R_0 = \nabla(-\Delta)$ la transformada de Riesz *clásica* y K_0 su núcleo asociado.

$$\mathcal{R}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(x, y) f(y) dy$$

Comparación con Riesz "Clásicas"

Consideramos $R_0 = \nabla(-\Delta)$ la transformada de Riesz *clásica* y K_0 su núcleo asociado.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \\ &= \int_{B(x, \rho(x))^c} \mathcal{K}(x, y) f(y) dy + \int_{B(x, \rho(x))} K_0(x, y) f(y) dy \\ &\quad + \int_{B(x, \rho(x))} [\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)] f(y) dy\end{aligned}$$

Comparación con Riesz "Clásicas"

Consideramos $R_0 = \nabla(-\Delta)$ la transformada de Riesz *clásica* y K_0 su núcleo asociado.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \\ &= \int_{B(x, \rho(x))^c} \mathcal{K}(x, y) f(y) dy + \int_{B(x, \rho(x))} K_0(x, y) f(y) dy \\ &\quad + \int_{B(x, \rho(x))} [\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)] f(y) dy\end{aligned}$$

1. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y)|$ en $B(x, \rho(x))^c$ (**tamaño**)

Comparación con Riesz "Clásicas"

Consideramos $R_0 = \nabla(-\Delta)$ la transformada de Riesz *clásica* y K_0 su núcleo asociado.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \\ &= \int_{B(x, \rho(x))^c} \mathcal{K}(x, y) f(y) dy + \int_{B(x, \rho(x))} K_0(x, y) f(y) dy \\ &\quad + \int_{B(x, \rho(x))} [\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)] f(y) dy\end{aligned}$$

1. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y)|$ en $B(x, \rho(x))^c$ (**tamaño**)
2. Resultado para $R_0(x, y)$ en $B(x, \rho(x))$

Comparación con Riesz "Clásicas"

Consideramos $R_0 = \nabla(-\Delta)$ la transformada de Riesz *clásica* y K_0 su núcleo asociado.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \\ &= \int_{B(x, \rho(x))^c} \mathcal{K}(x, y) f(y) dy + \int_{B(x, \rho(x))} K_0(x, y) f(y) dy \\ &\quad + \int_{B(x, \rho(x))} [\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)] f(y) dy\end{aligned}$$

1. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y)|$ en $B(x, \rho(x))^c$ (**tamaño**)
2. Resultado para $R_0(x, y)$ en $B(x, \rho(x))$
3. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)|$ en $B(x, \rho(x))$ (**comparación**)

Resultados en L^p

Para $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$, si $V \in RH_q$

1. **caso malo**, $\frac{d}{2} \leq q < d$ y $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$ (comparación)

Resultados en L^p

Para $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$, si $V \in RH_q$

1. **caso malo**, $\frac{d}{2} \leq q < d$ y $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$ (comparación)

► $\mathcal{R}$ acotado en L^p para $1 < p \leq s$

Resultados en L^p

Para $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$, si $V \in RH_q$

1. **caso malo**, $\frac{d}{2} \leq q < d$ y $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$ (comparación)

- ▶ $\mathcal{R}$ acotado en L^p para $1 < p \leq s$
- ▶ $\mathcal{R}^*$ acotado en L^p para $s' \leq p < \infty$

Resultados en L^p

Para $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$, si $V \in RH_q$

1. **caso malo**, $\frac{d}{2} \leq q < d$ y $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$ (comparación)

- ▶ $\mathcal{R}$ acotado en L^p para $1 < p \leq s$
- ▶ $\mathcal{R}^*$ acotado en L^p para $s' \leq p < \infty$

2. **caso bueno**, $q \geq d$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$ son CZO, más aún,
(Aprovechando estimación puntual de $|\nabla \Gamma|$)

- ▶ $|\mathcal{K}^{(*)}(x, y)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N} \frac{1}{|x-y|^d}$
- ▶ $|\mathcal{K}^{(*)}(x+h, y) - \mathcal{K}^{(*)}(x, y)| \leq \frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}}$

Resultados en L^p

Para $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$, si $V \in RH_q$

1. **caso malo**, $\frac{d}{2} \leq q < d$ y $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$ (comparación)

- ▶ $\mathcal{R}$ acotado en L^p para $1 < p \leq s$
- ▶ $\mathcal{R}^*$ acotado en L^p para $s' \leq p < \infty$

2. **caso bueno**, $q \geq d$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$ son CZO, más aún,
(Aprovechando estimación puntual de $|\nabla \Gamma|$)

- ▶ $|\mathcal{K}^{(*)}(x, y)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N} \frac{1}{|x-y|^d}$
- ▶ $|\mathcal{K}^{(*)}(x+h, y) - \mathcal{K}^{(*)}(x, y)| \leq \frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}}$

Para $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_2^*$, si $V \in RH_q$ con $q \geq \frac{d}{2}$, (otro método)

- ▶ $\mathcal{R}_2$ acotado en L^p para $1 < p \leq q$

Resultados en L^p

Para $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$, si $V \in RH_q$

1. **caso malo**, $\frac{d}{2} \leq q < d$ y $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$ (comparación)

- ▶ $\mathcal{R}$ acotado en L^p para $1 < p \leq s$
- ▶ $\mathcal{R}^*$ acotado en L^p para $s' \leq p < \infty$

2. **caso bueno**, $q \geq d$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$ son CZO, más aún,
(Aprovechando estimación puntual de $|\nabla \Gamma|$)

- ▶ $|\mathcal{K}^{(*)}(x, y)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N} \frac{1}{|x-y|^d}$
- ▶ $|\mathcal{K}^{(*)}(x+h, y) - \mathcal{K}^{(*)}(x, y)| \leq \frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}}$

Para $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_2^*$, si $V \in RH_q$ con $q \geq \frac{d}{2}$, (otro método)

- ▶ $\mathcal{R}_2$ acotado en L^p para $1 < p \leq q$
- ▶ $\mathcal{R}_2^*$ acotado en L^p para $q' \leq p < \infty$

Resultados en L^p

Para $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$, si $V \in RH_q$

1. **caso malo**, $\frac{d}{2} \leq q < d$ y $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$ (comparación)

- ▶ $\mathcal{R}$ acotado en L^p para $1 < p \leq s$ (óptimo)
- ▶ $\mathcal{R}^*$ acotado en L^p para $s' \leq p < \infty$ (óptimo)

2. **caso bueno**, $q \geq d$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$ son CZO, más aún,
(Aprovechando estimación puntual de $|\nabla \Gamma|$)

- ▶ $|\mathcal{K}^{(*)}(x, y)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N} \frac{1}{|x-y|^d}$
- ▶ $|\mathcal{K}^{(*)}(x+h, y) - \mathcal{K}^{(*)}(x, y)| \leq \frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}}$

Para $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_2^*$, si $V \in RH_q$ con $q \geq \frac{d}{2}$, (otro método)

- ▶ $\mathcal{R}_2$ acotado en L^p para $1 < p \leq q$ (óptimo)
- ▶ $\mathcal{R}_2^*$ acotado en L^p para $q' \leq p < \infty$ (óptimo)

Clases de Pesos

Para $p > 1$, se define $A_p^{\rho, \infty} = \bigcup_{\theta \geq 0} A_p^{\rho, \theta}$, donde

$$w \in A_p^{\rho, \theta} \text{ si } \left(\int_B w \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B w^{\frac{-1}{p-1}} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \right)^{\theta}, \forall B = B(x, r)$$

Clases de Pesos

Para $p > 1$, se define $A_p^{\rho, \infty} = \bigcup_{\theta \geq 0} A_p^{\rho, \theta}$, donde

$$w \in A_p^{\rho, \theta} \text{ si } \left(\int_B w \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B w^{\frac{-1}{p-1}} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \right)^{\theta}, \forall B = B(x, r)$$

Para $p = 1$, se define $A_1^{\rho, \infty} = \bigcup_{\theta \geq 0} A_1^{\rho, \theta}$, donde

$$w \in A_1^{\rho, \theta} \text{ si } \int_B w \leq C \left(\inf_B w \right) \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \right)^{\theta}, \forall B = B(x, r)$$

Clases de Pesos

Para $p > 1$, se define $A_p^{\rho, \infty} = \bigcup_{\theta \geq 0} A_p^{\rho, \theta}$, donde

$$w \in A_p^{\rho, \theta} \text{ si } \left(\int_B w \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B w^{\frac{-1}{p-1}} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \right)^{\theta}, \forall B = B(x, r)$$

Para $p = 1$, se define $A_1^{\rho, \infty} = \bigcup_{\theta \geq 0} A_1^{\rho, \theta}$, donde

$$w \in A_1^{\rho, \theta} \text{ si } \int_B w \leq C \left(\inf_B w \right) \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \right)^{\theta}, \forall B = B(x, r)$$

$w \in D_{\mu}^{\rho}$ si existe un $\theta \geq 0$ tal que

$$w(\sigma B) \leq C \sigma^{d_{\mu}} w(B) \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \right)^{\theta}, \forall B = B(x, r)$$

Resultados en $L^p(w)$

Si $V \in RH_q$,

1. **caso bueno**, $q \geq d$,

► $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$ acotados en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$, si $w \in A_p^{\rho, \infty}$

Resultados en $L^p(w)$

Si $V \in RH_q$,

1. **caso bueno**, $q \geq d$,

▶ $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$ acotados en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$, si $w \in A_p^{\rho, \infty}$

2. **caso malo**, $\frac{d}{2} \leq q < d$,

▶ $\mathcal{R}^*$ acotado en $L^p(w)$ para $s' < p < \infty$, si $w \in A_{p/s'}^{\rho, \infty}$

Resultados en $L^p(w)$

Si $V \in RH_q$,

1. **caso bueno**, $q \geq d$,

▶ $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$ acotados en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$, si $w \in A_p^{\rho, \infty}$

2. **caso malo**, $\frac{d}{2} \leq q < d$,

▶ $\mathcal{R}^*$ acotado en $L^p(w)$ para $s' < p < \infty$, si $w \in A_{p/s'}^{\rho, \infty}$

▶ $\mathcal{R}$ acotado en $L^p(w)$ para $1 < p < s$, si $w^{\frac{-1}{p-1}} \in A_{p'/s'}^{\rho, \infty}$

Resultados en $L^p(w)$

Si $V \in RH_q$,

1. **caso bueno**, $q \geq d$,

▶ $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$ acotados en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$, si $w \in A_p^{\rho, \infty}$

2. **caso malo**, $\frac{d}{2} \leq q < d$,

▶ $\mathcal{R}^*$ acotado en $L^p(w)$ para $s' < p < \infty$, si $w \in A_{p/s'}^{\rho, \infty}$

▶ $\mathcal{R}$ acotado en $L^p(w)$ para $1 < p < s$, si $w^{\frac{-1}{p-1}} \in A_{p'/s'}^{\rho, \infty}$

También satisfacen desigualdades de tipo débil $(1, 1)$ con pesos

BMO asociado a $\mathcal{L}$

$BMO_{\mathcal{L}}$ [Dziubanski et al, 2005]. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ que satisface

BMO asociado a $\mathcal{L}$

$BMO_{\mathcal{L}}$ [Dziubanski et al, 2005]. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ que satisface

$$\blacktriangleright \frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| \leq C_1 \text{ para toda bola } B \text{ y}$$

BMO asociado a $\mathcal{L}$

$BMO_{\mathcal{L}}$ [Dziubanski et al, 2005]. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ que satisface

- ▶ $\frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| \leq C_1$ para toda bola B y
- ▶ $\frac{1}{|B|} \int_B |f| \leq C_2$, si $B = B(x, R)$ y $R \geq \rho(x)$.

BMO asociado a $\mathcal{L}$

$BMO_{\mathcal{L}}$ [Dziubanski et al, 2005]. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ que satisface

- ▶ $\frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| \leq C_1$ para toda bola B y
- ▶ $\frac{1}{|B|} \int_B |f| \leq C_2$, si $B = B(x, R)$ y $R \geq \rho(x)$.

$BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}$ [Bongioanni, Harboure, Salinas, 2008] $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ que satisface

BMO asociado a $\mathcal{L}$

$BMO_{\mathcal{L}}$ [Dziubanski et al, 2005]. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ que satisface

- ▶ $\frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| \leq C_1$ para toda bola B y
- ▶ $\frac{1}{|B|} \int_B |f| \leq C_2$, si $B = B(x, R)$ y $R \geq \rho(x)$.

$BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}$ [Bongioanni, Harboure, Salinas, 2008] $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ que satisface

- ▶ $\frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| \leq C_1 |B|^{\beta/d}$ para toda bola B y

BMO asociado a $\mathcal{L}$

$BMO_{\mathcal{L}}$ [Dziubanski et al, 2005]. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ que satisface

- ▶ $\frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| \leq C_1$ para toda bola B y
- ▶ $\frac{1}{|B|} \int_B |f| \leq C_2$, si $B = B(x, R)$ y $R \geq \rho(x)$.

$BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}$ [Bongioanni, Harboure, Salinas, 2008] $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ que satisface

- ▶ $\frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| \leq C_1 |B|^{\beta/d}$ para toda bola B y
- ▶ $\frac{1}{|B|} \int_B |f| \leq C_2 |B|^{\beta/d}$, si $B = B(x, R)$ y $R \geq \rho(x)$.

BMO asociado a $\mathcal{L}$

$BMO_{\mathcal{L}}$ [Dziubanski et al, 2005]. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ que satisface

- ▶ $\frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B| \leq C_1$ para toda bola B y
- ▶ $\frac{1}{|B|} \int_B |f| \leq C_2$, si $B = B(x, R)$ y $R \geq \rho(x)$.

$BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ [Bongioanni, Harboure, Salinas, 2008] $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ que satisface

- ▶ $\frac{1}{w(B)} \int_B |f - f_B| \leq C_1 |B|^{\beta/d}$ para toda bola B y
- ▶ $\frac{1}{w(B)} \int_B |f| \leq C_2 |B|^{\beta/d}$, si $B = B(x, R)$ y $R \geq \rho(x)$.

Recordemos que...

Para $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$, si $V \in RH_q$

1. **caso malo**, $\frac{d}{2} \leq q < d$ y $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$
 - ▶ $\mathcal{R}$ acotado en L^p para $1 < p \leq s$ (óptimo)
 - ▶ $\mathcal{R}^*$ acotado en L^p para $s' \leq p < \infty$ (óptimo)
2. **caso bueno**, $q \geq d$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$ son CZO, más aún,
 - ▶ $|\mathcal{K}^{(*)}(x, y)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N} \frac{1}{|x-y|^d}$
 - ▶ $|\mathcal{K}^{(*)}(x+h, y) - \mathcal{K}^{(*)}(x, y)| \leq \frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}}$

Para $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_2^*$, si $V \in RH_q$ con $q \geq \frac{d}{2}$,

- ▶ $\mathcal{R}_2$ acotado en L^p para $1 < p \leq q$ (óptimo)
- ▶ $\mathcal{R}_2^*$ acotado en L^p para $q' \leq p < \infty$ (óptimo)

Resultados en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ vía comparación

Para $\mathcal{R}$ (caso bueno) y $\mathcal{R}^*$ (ambos casos) [BHS, 2009]

Herramientas: $(r < \rho(x), B_{\rho} = B(x, \rho(x)) , B_r = B(x, r))$

Resultados en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ vía comparación

Para $\mathcal{R}$ (caso bueno) y $\mathcal{R}^*$ (ambos casos) [BHS, 2009]

Herramientas: ($r < \rho(x)$, $B_{\rho} = B(x, \rho(x))$, $B_r = B(x, r)$)

1. Acotación en L^p para $\mathcal{R}^*$

Resultados en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ vía comparación

Para $\mathcal{R}$ (caso bueno) y $\mathcal{R}^*$ (ambos casos) [BHS, 2009]

Herramientas: ($r < \rho(x)$, $B_{\rho} = B(x, \rho(x))$, $B_r = B(x, r)$)

1. Acotación en L^p para $\mathcal{R}^*$
2. Estimación para $|\mathcal{K}^*(x, y)|$ en $(B_{\rho})^c$ (**tamaño**)

Resultados en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ vía comparación

Para $\mathcal{R}$ (caso bueno) y $\mathcal{R}^*$ (ambos casos) [BHS, 2009]

Herramientas: ($r < \rho(x)$, $B_{\rho} = B(x, \rho(x))$, $B_r = B(x, r)$)

1. Acotación en L^p para $\mathcal{R}^*$
2. Estimación para $|\mathcal{K}^*(x, y)|$ en $(B_{\rho})^c$ (**tamaño**)
3. Resultado para R_0^*

Resultados en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ vía comparación

Para $\mathcal{R}$ (caso bueno) y $\mathcal{R}^*$ (ambos casos) [BHS, 2009]

Herramientas: ($r < \rho(x)$, $B_{\rho} = B(x, \rho(x))$, $B_r = B(x, r)$)

1. Acotación en L^p para $\mathcal{R}^*$
2. Estimación para $|\mathcal{K}^*(x, y)|$ en $(B_{\rho})^c$ (**tamaño**)
3. Resultado para R_0^*
4. Estimación para $|\mathcal{K}^*(x, y) - K_0^*(x, y)|$ en B_r (**comparación**)

Resultados en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ vía comparación

Para $\mathcal{R}$ (caso bueno) y $\mathcal{R}^*$ (ambos casos) [BHS, 2009]

Herramientas: ($r < \rho(x)$, $B_{\rho} = B(x, \rho(x))$, $B_r = B(x, r)$)

1. Acotación en L^p para $\mathcal{R}^*$
2. Estimación para $|\mathcal{K}^*(x, y)|$ en $(B_{\rho})^c$ (**tamaño**)
3. Resultado para R_0^*
4. Estimación para $|\mathcal{K}^*(x, y) - K_0^*(x, y)|$ en B_r (**comparación**)
5. Estimación para $||[\mathcal{K}^*(x, y) - K_0^*(x, y)] - [\mathcal{K}^*(z, y) - K_0^*(z, y)]||$ en $B_{\rho} \setminus B_r$ (**diferencia de diferencias**)

Resultados en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ vía comparación

Para $\mathcal{R}$ (caso bueno) y $\mathcal{R}^*$ (ambos casos) [BHS, 2009]

Herramientas: ($r < \rho(x)$, $B_{\rho} = B(x, \rho(x))$, $B_r = B(x, r)$)

1. Acotación en L^p para $\mathcal{R}^*$
2. Estimación para $|\mathcal{K}^*(x, y)|$ en $(B_{\rho})^c$ (**tamaño**)
3. Resultado para R_0^*
4. Estimación para $|\mathcal{K}^*(x, y) - K_0^*(x, y)|$ en B_r (**comparación**)
5. Estimación para $||[\mathcal{K}^*(x, y) - K_0^*(x, y)] - [\mathcal{K}^*(z, y) - K_0^*(z, y)]||$ en $B_{\rho} \setminus B_r$ (**diferencia de diferencias**)
6. Estimación para $|\mathcal{K}^*(x, y) - \mathcal{K}^*(z, y)|$ en $(B_{\rho})^c$ (**suavidad**)

Resultados en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ vía comparación

Para $\mathcal{R}$ (caso bueno) y $\mathcal{R}^*$ (ambos casos) [BHS, 2009]

Herramientas: ($r < \rho(x)$, $B_{\rho} = B(x, \rho(x))$, $B_r = B(x, r)$)

1. Acotación en L^p para $\mathcal{R}^*$
2. Estimación para $|\mathcal{K}^*(x, y)|$ en $(B_{\rho})^c$ (**tamaño**)
3. Resultado para R_0^*
4. Estimación para $|\mathcal{K}^*(x, y) - K_0^*(x, y)|$ en B_r (**comparación**)
5. Estimación para $||[\mathcal{K}^*(x, y) - K_0^*(x, y)] - [\mathcal{K}^*(z, y) - K_0^*(z, y)]||$ en $B_{\rho} \setminus B_r$ (**diferencia de diferencias**)
6. Estimación para $|\mathcal{K}^*(x, y) - \mathcal{K}^*(z, y)|$ en $(B_{\rho})^c$ (**suavidad**)

Para w en ciertas clases A_p (Muckenhoupt)

El rango de β depende de la suavidad

Tamaño $\mathcal{R}^*$

Si $V \in RH_q$ con $q \geq d$ (caso bueno)

$$|\mathcal{K}^*(x, y)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N} \frac{1}{|x-y|^d}$$

Tamaño $\mathcal{R}^*$

Si $V \in RH_q$ con $q \geq d$ (caso bueno)

$$|\mathcal{K}^*(x, y)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N} \frac{1}{|x-y|^d}$$

Si $V \in RH_q$ con $d/2 \leq q < d$ (caso malo)

$$|\mathcal{K}^*(x, y)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^N} \frac{1}{|x-y|^{d-1}} \left(\int_{B(y, |x-y|/4)} \frac{V(u)}{|u-y|^{d-1}} du + \frac{1}{|x-y|} \right)$$

Suavidad $\mathcal{R}^\star$

Si $V \in RH_q$ con $q \geq d$ (caso bueno). Si $0 < \delta < 2 - d/q$

$$|\mathcal{K}^\star(x, y) - \mathcal{K}^\star(z, y)| \leq \frac{|x - z|^\delta}{|x - y|^{d+\delta}}$$

siempre que $|x - z| < |x - y|/2$

Suavidad $\mathcal{R}^*$

Si $V \in RH_q$ con $q \geq d$ (caso bueno). Si $0 < \delta < 2 - d/q$

$$|\mathcal{K}^*(x, y) - \mathcal{K}^*(z, y)| \leq \frac{|x - z|^\delta}{|x - y|^{d+\delta}}$$

siempre que $|x - z| < |x - y|/2$

Si $V \in RH_q$ con $d/2 \leq q < d$ (caso malo)

$$|\mathcal{K}^*(x, y) - \mathcal{K}^*(z, y)| \leq$$

$$\frac{|x - z|^\delta}{|x - y|^{d-1+\delta}} \left(\int_{B(y, |x-y|/4)} \frac{V(u)}{|u - y|^{d-1}} du + \frac{1}{|x - y|} \right)$$

siempre que $|x - z| < |x - y|/2$

Comparacion $\mathcal{R}^*$ con R_0^*

Si $V \in RH_q$ con $q > d$ (caso bueno)

$$|\mathcal{K}^*(x, y) - K_0^*(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^d} \left(\frac{|x - y|}{\rho(x)} \right)^{2-d/q}$$

Comparacion $\mathcal{R}^*$ con R_0^*

Si $V \in RH_q$ con $q > d$ (caso bueno)

$$|\mathcal{K}^*(x, y) - K_0^*(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^d} \left(\frac{|x - y|}{\rho(x)} \right)^{2-d/q}$$

Si $V \in RH_q$ con $d/2 \leq q < d$ (caso malo)

$$|\mathcal{K}^*(x, y) - K_0^*(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^{d-1}} \left(\int_{B(y, |x-y|/4)} \frac{V(u)}{|u - y|^{d-1}} du + \left(\frac{|x - y|}{\rho(x)} \right)^{2-d/q} \right)$$

Para $R_2^\star \dots$

Acotación en $BMO_{\mathcal{L}}$ [Dong, Liu, 2012]

Con algunas hipótesis adicionales:

Para $R_2^\star \dots$

Acotación en $BMO_{\mathcal{L}}$ [Dong, Liu, 2012]

Con algunas hipótesis adicionales:

1. $V \in RH_q$, con $q \geq d$ ($\rho(x)$ asociada a V)

Para R_2^* ...

Acotación en $BMO_{\mathcal{L}}$ [Dong, Liu, 2012]

Con algunas hipótesis adicionales:

1. $V \in RH_q$, con $q \geq d$ ($\rho(x)$ asociada a V)
2. $|\nabla V| \in RH_{\hat{q}}$, con $\hat{q} \geq d/2$ ($\hat{\rho}(x)$ asociada a $|\nabla V|$)

Para $R_2^\star \dots$

Acotación en $BMO_{\mathcal{L}}$ [Dong, Liu, 2012]

Con algunas hipótesis adicionales:

1. $V \in RH_q$, con $q \geq d$ ($\rho(x)$ asociada a V)
2. $|\nabla V| \in RH_{\hat{q}}$, con $\hat{q} \geq d/2$ ($\hat{\rho}(x)$ asociada a $|\nabla V|$)
3. $\rho(x) \leq C\hat{\rho}(x) \leq M$, para $M > 0$ fijo

Operadores tipo CZ vía $T1$

[Ma, Stinga, Torrea, Zhang, 2014] T acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)dy, \quad f \in L_c^p(\mathbb{R}^d), \quad \text{c.t.p. } x \in \text{sop}(f)^c$$

Donde K satisface

$$\triangleright |K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^d} \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N} \quad \text{para } N > 0 \text{ y } x \neq y,$$

Operadores tipo CZ vía $T1$

[Ma, Stinga, Torrea, Zhang, 2014] T acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) dy, \quad f \in L_c^p(\mathbb{R}^d), \quad \text{c.t.p. } x \in \text{sop}(f)^c$$

Donde K satisface

$$\blacktriangleright |K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^d} \left(1 + \frac{|x - y|}{\rho(x)}\right)^{-N} \quad \text{para } N > 0 \text{ y } x \neq y,$$

$$\blacktriangleright |K(x, y) - K(x, z)| + |K(y, x) - K(z, x)| \leq C \frac{|y - z|^\delta}{|x - y|^{d+\delta}},$$

para $|x - y| > 2|y - z|$.

Operadores tipo CZ vía $T1$

[Ma, Stinga, Torrea, Zhang, 2014] T acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) dy, \quad f \in L_c^p(\mathbb{R}^d), \quad \text{c.t.p. } x \in \text{sop}(f)^c$$

Donde K satisface

- ▶ $|K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^d} \left(1 + \frac{|x - y|}{\rho(x)}\right)^{-N}$ para $N > 0$ y $x \neq y$,
- ▶ $|K(x, y) - K(x, z)| + |K(y, x) - K(z, x)| \leq C \frac{|y - z|^\delta}{|x - y|^{d+\delta}},$
para $|x - y| > 2|y - z|$.

Operadores tipo CZ vía $T1$

[Ma, Stinga, Torrea, Zhang, 2014] T acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) dy, \quad f \in L_c^p(\mathbb{R}^d), \quad \text{c.t.p. } x \in \text{sop}(f)^c$$

Donde K satisface

- ▶ $|K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^d} \left(1 + \frac{|x - y|}{\rho(x)}\right)^{-N}$ para $N > 0$ y $x \neq y$,
- ▶ $|K(x, y) - K(x, z)| + |K(y, x) - K(z, x)| \leq C \frac{|y - z|^\delta}{|x - y|^{d+\delta}},$
para $|x - y| > 2|y - z|$.

Operadores tipo CZ vía $T1$

[Ma, Stinga, Torrea, Zhang, 2014] T acotado en $L^p(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) dy, \quad f \in L_c^p(\mathbb{R}^d), \quad \text{c.t.p. } x \in \text{sop}(f)^c$$

Donde K satisface

$$\triangleright |K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^d} \left(1 + \frac{|x - y|}{\rho(x)}\right)^{-N} \quad \text{para } N > 0 \text{ y } x \neq y,$$

$$\triangleright |K(x, y) - K(x, z)| + |K(y, x) - K(z, x)| \leq C \frac{|y - z|^\delta}{|x - y|^{d+\delta}},$$

para $|x - y| > 2|y - z|$.

T es acotado en $BMO_{\mathcal{L}}^\beta$ para $0 < \beta < \delta$ si y solo si

$$\frac{1}{|B|} \int_B |T1(y) - (T1)_B| dy \leq C \left(\frac{r}{\rho(x_0)} \right)^\beta,$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $0 < r < \frac{1}{2}\rho(x_0)$.

Operadores tipo CZ vía $T1$

- Aplica sólo en el caso bueno a $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$

Operadores tipo CZ vía $T1$

- ▶ Aplica sólo en el caso bueno a $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$
- ▶ Admite extensiones en algunos sentidos,

Operadores tipo CZ vía $T1$

- ▶ Aplica sólo en el caso bueno a $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$
- ▶ Admite extensiones en algunos sentidos,
 1. Clases más grandes de núcleos

Operadores tipo CZ vía $T1$

- ▶ Aplica sólo en el caso bueno a $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^*$
- ▶ Admite extensiones en algunos sentidos,
 1. Clases más grandes de núcleos
 2. Estudiar la clase de pesos

Núcleos de tipo Hörmander

Consideramos K que satisface, para $\eta > 1$ y $\delta > 0$,

Núcleos de tipo Hörmander

Consideramos K que satisface, para $\eta > 1$ y $\delta > 0$,

$$\blacktriangleright \left(\int_{R < |x_0 - y| < 2R} |K(x, y)|^\eta dy \right)^{\frac{1}{\eta}} \leq C_N R^{-\frac{d}{\eta'}} \left(1 + \frac{R}{\rho(x)} \right)^{-N},$$

para todo $N > 0$, $|x - x_0| < r < R/2$.

Núcleos de tipo Hörmander

Consideramos K que satisface, para $\eta > 1$ y $\delta > 0$,

- ▶
$$\left(\int_{R < |x_0 - y| < 2R} |K(x, y)|^\eta dy \right)^{\frac{1}{\eta}} \leq C_N R^{-\frac{d}{\eta'}} \left(1 + \frac{R}{\rho(x)} \right)^{-N},$$

para todo $N > 0$, $|x - x_0| < r < R/2$.
- ▶
$$\left(\int_{R < |x_0 - y| < 2R} |K(x, y) - K(x_0, y)|^\eta dy \right)^{\frac{1}{\eta}} \leq C R^{-\frac{d}{\eta'}} \left(\frac{r}{R} \right)^\delta,$$

cuando $|x - x_0| < r \leq \rho(x_0)$, $r < 2R$.

Núcleos de tipo Hörmander

Consideramos K que satisface, para $\eta > 1$ y $\delta > 0$, ($K \in \mathcal{H}(\eta, \delta)$)

- ▶
$$\left(\int_{R < |x_0 - y| < 2R} |K(x, y)|^\eta dy \right)^{\frac{1}{\eta}} \leq C_N R^{-\frac{d}{\eta'}} \left(1 + \frac{R}{\rho(x)} \right)^{-N},$$
 para todo $N > 0$, $|x - x_0| < r < R/2$.
- ▶
$$\left(\int_{R < |x_0 - y| < 2R} |K(x, y) - K(x_0, y)|^\eta dy \right)^{\frac{1}{\eta}} \leq C R^{-\frac{d}{\eta'}} \left(\frac{r}{R} \right)^\delta,$$
 cuando $|x - x_0| < r \leq \rho(x_0)$, $r < 2R$.

Núcleos de tipo Hörmander

Consideramos K que satisface, para $\eta > 1$ y $\delta > 0$, ($K \in \mathcal{H}(\eta, \delta)$)

- ▶
$$\left(\int_{R < |x_0 - y| < 2R} |K(x, y)|^\eta dy \right)^{\frac{1}{\eta}} \leq C_N R^{-\frac{d}{\eta'}} \left(1 + \frac{R}{\rho(x)} \right)^{-N},$$
 para todo $N > 0$, $|x - x_0| < r < R/2$.
- ▶
$$\left(\int_{R < |x_0 - y| < 2R} |K(x, y) - K(x_0, y)|^\eta dy \right)^{\frac{1}{\eta}} \leq C R^{-\frac{d}{\eta'}} \left(\frac{r}{R} \right)^\delta,$$
 cuando $|x - x_0| < r \leq \rho(x_0)$, $r < 2R$.

Las condiciones puntuales (CZ) implican las de tipo Hörmander.

Resultado en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$

Teorema

Sea T un operador acotado en L^{σ} para $\sigma > s'$, cuyo núcleo asociado está en la clase $\mathcal{H}(\eta, \delta)$. Sea w un peso en la clase D_{μ}^{ρ} tal que

$$w \in \bigcup_{\eta > s'} RH_{\eta} \cap A_{s/\eta'}^{\rho, \infty}.$$

Sea $0 < \beta < 1$ tal que $\beta + d(\mu - 1) \leq \min\{\delta, 1\}$. Entonces T está acotado en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ si y sólo si existe una constante C tal que

$$\left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right)^{\beta} \frac{1}{|B|} \int_B |T1(y) - (T1)_B| dy \leq C,$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $0 < r < \rho(x_0)/2$.

Resultado en $BMO_{\mathcal{L}}(w)$ ($\beta = 0$)

Teorema

Con las mismas hipótesis que el teorema anterior tenemos que T está acotado en $BMO_{\mathcal{L}}(w)$ si y sólo si existe una constante C tal que

$$\log \left(\frac{\rho(x_0)}{r} \right) \frac{1}{|B|} \int_B |T1(y) - (T1)_B| dy \leq C,$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $0 < r < \rho(x_0)/2$.

Aplicaciones (no sólo las transformadas de RS)

Acotación en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ de los siguientes operadores:

- ▶ Las transformadas de Riesz $\mathcal{L}^{-1/2}\nabla$ para $q > \frac{d}{2}$

Aplicaciones (no sólo las transformadas de RS)

Acotación en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ de los siguientes operadores:

- ▶ Las transformadas de Riesz $\mathcal{L}^{-1/2}\nabla$ para $q > \frac{d}{2}$
- ▶ Los operadores $\mathcal{L}^{-1}V$ y $\mathcal{L}^{-1/2}V^{1/2}$,

Aplicaciones (no sólo las transformadas de RS)

Acotación en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ de los siguientes operadores:

- ▶ Las transformadas de Riesz $\mathcal{L}^{-1/2}\nabla$ para $q > \frac{d}{2}$
- ▶ Los operadores $\mathcal{L}^{-1}V$ y $\mathcal{L}^{-1/2}V^{1/2}$,
- ▶ Operador maximal del semigrupo $e^{-t\mathcal{L}}$,

Aplicaciones (no sólo las transformadas de RS)

Acotación en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ de los siguientes operadores:

- ▶ Las transformadas de Riesz $\mathcal{L}^{-1/2}\nabla$ para $q > \frac{d}{2}$
- ▶ Los operadores $\mathcal{L}^{-1}V$ y $\mathcal{L}^{-1/2}V^{1/2}$,
- ▶ Operador maximal del semigrupo $e^{-t\mathcal{L}}$,
- ▶ Operador maximal del semigrupo de Poisson asociado,

Aplicaciones (no sólo las transformadas de RS)

Acotación en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ de los siguientes operadores:

- ▶ Las transformadas de Riesz $\mathcal{L}^{-1/2}\nabla$ para $q > \frac{d}{2}$
- ▶ Los operadores $\mathcal{L}^{-1}V$ y $\mathcal{L}^{-1/2}V^{1/2}$,
- ▶ Operador maximal del semigrupo $e^{-t\mathcal{L}}$,
- ▶ Operador maximal del semigrupo de Poisson asociado,
- ▶ Función g de Littlewood-Paley para el semigrupo $e^{-t\mathcal{L}}$ y para el semigrupo de Poisson,

Aplicaciones (no sólo las transformadas de RS)

Acotación en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ de los siguientes operadores:

- ▶ Las transformadas de Riesz $\mathcal{L}^{-1/2}\nabla$ para $q > \frac{d}{2}$
- ▶ Los operadores $\mathcal{L}^{-1}V$ y $\mathcal{L}^{-1/2}V^{1/2}$,
- ▶ Operador maximal del semigrupo $e^{-t\mathcal{L}}$,
- ▶ Operador maximal del semigrupo de Poisson asociado,
- ▶ Función g de Littlewood-Paley para el semigrupo $e^{-t\mathcal{L}}$ y para el semigrupo de Poisson,
- ▶ Multiplicadores de la transformada de Laplace.

Aplicaciones (no sólo las transformadas de RS)

Acotación en $BMO_{\mathcal{L}}^{\beta}(w)$ de los siguientes operadores:

- ▶ Las transformadas de Riesz $\mathcal{L}^{-1/2}\nabla$ para $q > \frac{d}{2}$
- ▶ Los operadores $\mathcal{L}^{-1}V$ y $\mathcal{L}^{-1/2}V^{1/2}$,
- ▶ Operador maximal del semigrupo $e^{-t\mathcal{L}}$,
- ▶ Operador maximal del semigrupo de Poisson asociado,
- ▶ Función g de Littlewood-Paley para el semigrupo $e^{-t\mathcal{L}}$ y para el semigrupo de Poisson,
- ▶ Multiplicadores de la transformada de Laplace.

Aplicación a $\mathcal{R}$

Las herramientas en el trabajo de BHS eran

1. Acotación en L^p para $\mathcal{R}$
2. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y)|$ en $(B_\rho)^c$ (**tamaño**)
3. Resultado para R_0
4. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)|$ en B_r (**comparación**)
5. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)| - |\mathcal{K}(z, y) - K_0(z, y)|$ en $B_\rho \setminus B_r$ (**diferencia de diferencias**)
6. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{K}(x, y + h)|$ en $(B_\rho)^c$ (**suavidad**)

Aplicación a $\mathcal{R}$

Las hipótesis del resultado $T1$ son

1. Acotación en L^p para $\mathcal{R}$
2. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y)|$ en $(B_\rho)^c$ (**tamaño**)
3. Resultado para R_0
4. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)|$ en B_r (**comparación**)
5. Estimación para $||[\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)] - [\mathcal{K}(z, y) - K_0(z, y)]||$ en $B_\rho \setminus B_r$ (**diferencia de diferencias**)
6. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{K}(x, y + h)|$ en $(B_\rho)^c$ (**suavidad**)

Aplicación a $\mathcal{R}$

Las hipótesis del resultado $T1$ son

1. Acotación en L^p para $\mathcal{R}$
2. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y)|$ en $(B_\rho)^c$ (**tamaño**)
3. Resultado para R_0
4. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)|$ en B_r (**comparación**)
5. Estimación para $||[\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)] - [\mathcal{K}(z, y) - K_0(z, y)]||$ en $B_\rho \setminus B_r$ (**diferencia de diferencias**)
6. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{K}(x, y + h)|$ en $(B_\rho)^c$ (**suavidad**)

¿Que pasa con 3, 4 y 5?

Aplicación a $\mathcal{R}$

Las hipótesis del resultado $T1$ son

1. Acotación en L^p para $\mathcal{R}$
2. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y)|$ en $(B_\rho)^c$ (**tamaño**)
3. Resultado para R_0
4. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)|$ en B_r (**comparación**)
5. Estimación para $||[\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)] - [\mathcal{K}(z, y) - K_0(z, y)]||$ en $B_\rho \setminus B_r$ (**diferencia de diferencias**)
6. Estimación para $|\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{K}(x, y + h)|$ en $(B_\rho)^c$ (**suavidad**)

¿Que pasa con 3, 4 y 5?

Se usan para probar la condición $T1$

Aplicación a $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{R}_2^*$ (y una anécdota)

- Para $\mathcal{R}^*$ usamos las herramientas probadas en BHS para ver las estimaciones Hörmander del núcleo y probar la condición $T1$.

Aplicación a $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{R}_2^*$ (y una anécdota)

- ▶ Para $\mathcal{R}^*$ usamos las herramientas probadas en BHS para ver las estimaciones Hörmander del núcleo y probar la condición $T1$.
- ▶ Para $\mathcal{R}_2^*$ sólo conocíamos la acotación en L^p y el resultado para la transformada de Riesz clásica de orden 2. Estudiando el núcleo asociado pudimos obtener

Aplicación a $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{R}_2^*$ (y una anécdota)

- ▶ Para $\mathcal{R}^*$ usamos las herramientas probadas en BHS para ver las estimaciones Hörmander del núcleo y probar la condición $T1$.
- ▶ Para $\mathcal{R}_2^*$ sólo conocíamos la acotación en L^p y el resultado para la transformada de Riesz clásica de orden 2. Estudiando el núcleo asociado pudimos obtener
 - ▶ Estimaciones Hörmander para el núcleo,

Aplicación a $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{R}_2^*$ (y una anécdota)

- ▶ Para $\mathcal{R}^*$ usamos las herramientas probadas en BHS para ver las estimaciones Hörmander del núcleo y probar la condición $T1$.
- ▶ Para $\mathcal{R}_2^*$ sólo conocíamos la acotación en L^p y el resultado para la transformada de Riesz clásica de orden 2. Estudiando el núcleo asociado pudimos obtener
 - ▶ Estimaciones Hörmander para el núcleo,
 - ▶ comparación con el núcleo del operador clásico y diferencia de diferencias,

Aplicación a $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{R}_2^*$ (y una anécdota)

- ▶ Para $\mathcal{R}^*$ usamos las herramientas probadas en BHS para ver las estimaciones Hörmander del núcleo y probar la condición $T1$.
- ▶ Para $\mathcal{R}_2^*$ sólo conocíamos la acotación en L^p y el resultado para la transformada de Riesz clásica de orden 2. Estudiando el núcleo asociado pudimos obtener
 - ▶ Estimaciones Hörmander para el núcleo,
 - ▶ comparación con el núcleo del operador clásico y diferencia de diferencias,
 - ▶ La condición $T1$.

Aplicación a $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{R}_2^*$ (y una anécdota)

- ▶ Para $\mathcal{R}^*$ usamos las herramientas probadas en BHS para ver las estimaciones Hörmander del núcleo y probar la condición $T1$.
- ▶ Para $\mathcal{R}_2^*$ sólo conocíamos la acotación en L^p y el resultado para la transformada de Riesz clásica de orden 2. Estudiando el núcleo asociado pudimos obtener
 - ▶ Estimaciones Hörmander para el núcleo,
 - ▶ comparación con el núcleo del operador clásico y diferencia de diferencias,
 - ▶ La condición $T1$.

Un día recordamos que $\mathcal{R}^* = \mathcal{L}^{-1/2}\nabla$ y $\mathcal{R}_2^* = \mathcal{L}^{-1}\nabla^2$

Aplicación a $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{R}_2^*$ (y una anécdota)

- ▶ Para $\mathcal{R}^*$ usamos las herramientas probadas en BHS para ver las estimaciones Hörmander del núcleo y probar la condición $T1$.
- ▶ Para $\mathcal{R}_2^*$ sólo conocíamos la acotación en L^p y el resultado para la transformada de Riesz clásica de orden 2. Estudiando el núcleo asociado pudimos obtener
 - ▶ Estimaciones Hörmander para el núcleo,
 - ▶ comparación con el núcleo del operador clásico y diferencia de diferencias,
 - ▶ La condición $T1$.

Un día recordamos que $\mathcal{R}^* = \mathcal{L}^{-1/2}\nabla$ y $\mathcal{R}_2^* = \mathcal{L}^{-1}\nabla^2$
La condición $T1$ se verifica trivialmente para estos operadores!

Algunas consecuencias de la suavidad y el tamaño

Dado un operador T y un símbolo b

$$[T, b]f = T(bf) - bT(f)$$

Algunas consecuencias de la suavidad y el tamaño

Dado un operador T y un símbolo b

$$[T, b]f = T(bf) - bT(f)$$

De las estimaciones de tamaño y suavidad del núcleo asociado a $\mathcal{R}_2^*$ se desprende

- ▶ Acotación en $L^p(w)$ de $\mathcal{R}_2^*$ y de $[\mathcal{R}_2^*, b]$ para todo $p > q'$ y para $w \in A_{p/q'}^{\rho, \infty}$, si $b \in BMO_\infty(\rho)$ [Bongioanni, Cabral, Harboure, 2013]

Algunas consecuencias de la suavidad y el tamaño

Dado un operador T y un símbolo b

$$[T, b]f = T(bf) - bT(f)$$

De las estimaciones de tamaño y suavidad del núcleo asociado a $\mathcal{R}_2^*$ se desprende

- ▶ Acotación en $L^p(w)$ de $\mathcal{R}_2^*$ y de $[\mathcal{R}_2^*, b]$ para todo $p > q'$ y para $w \in A_{p/q'}^{\rho, \infty}$, si $b \in BMO_\infty(\rho)$ [Bongioanni, Cabral, Harboure, 2013]
- ▶ Acotación en $L^p(w)$ de $\mathcal{R}_2$ y de $[\mathcal{R}_2, b]$ para todo $p < q$ y para $w \in A_{p/q}^{\rho, \infty}$, si $b \in BMO_\infty(\rho)$ [BCH, 2013]

Algunas consecuencias de la suavidad y el tamaño

Dado un operador T y un símbolo b

$$[T, b]f = T(bf) - bT(f)$$

De las estimaciones de tamaño y suavidad del núcleo asociado a $\mathcal{R}_2^*$ se desprende

- ▶ Acotación en $L^p(w)$ de $\mathcal{R}_2^*$ y de $[\mathcal{R}_2^*, b]$ para todo $p > q'$ y para $w \in A_{p/q'}^{\rho, \infty}$, si $b \in BMO_\infty(\rho)$ [Bongioanni, Cabral, Harboure, 2013]
- ▶ Acotación en $L^p(w)$ de $\mathcal{R}_2$ y de $[\mathcal{R}_2, b]$ para todo $p < q$ y para $w \in A_{p/q}^{\rho, \infty}$, si $b \in BMO_\infty(\rho)$ [BCH, 2013]
- ▶ Tipo débil (1,1) respecto a w para $\mathcal{R}_2$ si $w^{q'} \in A_1^{\rho, \infty}$, [BCH, 2015]

Algunas consecuencias de la suavidad y el tamaño

Dado un operador T y un símbolo b

$$[T, b]f = T(bf) - bT(f)$$

De las estimaciones de tamaño y suavidad del núcleo asociado a $\mathcal{R}_2^*$ se desprende

- ▶ Acotación en $L^p(w)$ de $\mathcal{R}_2^*$ y de $[\mathcal{R}_2^*, b]$ para todo $p > q'$ y para $w \in A_{p/q'}^{\rho, \infty}$, si $b \in BMO_\infty(\rho)$ [Bongioanni, Cabral, Harboure, 2013]
- ▶ Acotación en $L^p(w)$ de $\mathcal{R}_2$ y de $[\mathcal{R}_2, b]$ para todo $p < q$ y para $w \in A_{p/q}^{\rho, \infty}$, si $b \in BMO_\infty(\rho)$ [BCH, 2013]
- ▶ Tipo débil (1,1) respecto a w para $\mathcal{R}_2$ si $w^{q'} \in A_1^{\rho, \infty}$, [BCH, 2015]
- ▶ Desigualdad de tipo $L \log L$ débil para el conmutador $[\mathcal{R}_2, b]$ si $b \in BMO_\infty(\rho)$ y $w^{q'} \in A_1^{\rho, \infty}$ [BHS, 2012]

Desigualdades con pesos diferentes

(o como aprovechar el resultado de comparación)

Estudiamos desigualdades del tipo

$$\int |Tf|^p w \leq C \int |f|^p \mathcal{M}w,$$

para $T = \mathcal{R}, \mathcal{R}^*, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2^*$, w un peso, $\mathcal{M}$ una maximal adecuada

Desigualdades con pesos diferentes

(o como aprovechar el resultado de comparación)

Estudiamos desigualdades del tipo

$$\int |Tf|^p w \leq C \int |f|^p M w,$$

para $T = \mathcal{R}, \mathcal{R}^*, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2^*$, w un peso, M una maximal adecuada

Antecedentes: Si M es la maximal de Hardy-Littlewood y S una integral singular de CZ,

► $\int_{\mathbb{R}^d} |Mf|^p w \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p M w, \text{ [Fefferman, Stein, 1971]}$

Desigualdades con pesos diferentes

(o como aprovechar el resultado de comparación)

Estudiamos desigualdades del tipo

$$\int |Tf|^p w \leq C \int |f|^p \mathcal{M}w,$$

para $T = \mathcal{R}, \mathcal{R}^*, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2^*$, w un peso, $\mathcal{M}$ una maximal adecuada

Antecedentes: Si M es la maximal de Hardy-Littlewood y S una integral singular de CZ,

- ▶ $\int_{\mathbb{R}^d} |Mf|^p w \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p Mw$, [Fefferman, Stein, 1971]
- ▶ $\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|^p w \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p M^{[p]+1} w$, [Perez, 1992]

Desigualdades con pesos diferentes

(o como aprovechar el resultado de comparación)

Estudiamos desigualdades del tipo

$$\int |Tf|^p w \leq C \int |f|^p \mathcal{M}w,$$

para $T = \mathcal{R}, \mathcal{R}^*, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2^*$, w un peso, $\mathcal{M}$ una maximal adecuada

Antecedentes: Si M es la maximal de Hardy-Littlewood y S una integral singular de CZ,

- ▶ $\int_{\mathbb{R}^d} |Mf|^p w \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p Mw$, [Fefferman, Stein, 1971]
- ▶ $\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|^p w \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p M^{[p]+1} w$, [Perez, 1992]
- ▶ $\int_{\mathbb{R}^d} |Sf|^p w \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p M_{\phi} w$, [Perez, 1992]

Partición del espacio en bolas críticas

Existe una sucesión de puntos x_k tal que la familia $\{Q_k = B(x_k, \rho(x_k))\}_{k \geq 1}$ satisface

Partición del espacio en bolas críticas

Existe una sucesión de puntos x_k tal que la familia $\{Q_k = B(x_k, \rho(x_k))\}_{k \geq 1}$ satisface

- Son un cubrimiento,

$$\bigcup_{k \geq 1} Q_k = \mathbb{R}^d$$

Partición del espacio en bolas críticas

Existe una sucesión de puntos x_k tal que la familia $\{Q_k = B(x_k, \rho(x_k))\}_{k \geq 1}$ satisface

- ▶ Son un cubrimiento,

$$\bigcup_{k \geq 1} Q_k = \mathbb{R}^d$$

- ▶ Con solapamiento controlado, para cada $\sigma \geq 1$ existen constantes C y N_1 tales que

$$\sum_{k \geq 1} \chi_{\sigma Q_k} \leq C \sigma^{N_1}.$$

[Dziubanski, Zienkiewicz, 1999]

Localización

$$\int |\mathcal{R}f|^p w \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}f|^p w$$

Localización

$$\begin{aligned}
 \int |\mathcal{R}f|^p w &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}f|^p w \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n}) + \mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n^c}) \pm R_0(f\chi_{\tilde{Q}_n})|^p w
 \end{aligned}$$

Localización

$$\begin{aligned}
 \int |\mathcal{R}f|^p w &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}f|^p w \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n}) + \mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n^c}) \pm R_0(f\chi_{\tilde{Q}_n})|^p w \\
 &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n^c})|^p w + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |R_0(f\chi_{\tilde{Q}_n})|^p w \\
 &\quad + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n}) - R_0(f\chi_{\tilde{Q}_n})|^p w = I + II + III
 \end{aligned}$$

Localización

$$\begin{aligned}
 \int |\mathcal{R}f|^p w &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}f|^p w \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n}) + \mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n^c}) \pm R_0(f\chi_{\tilde{Q}_n})|^p w \\
 &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n^c})|^p w + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |R_0(f\chi_{\tilde{Q}_n})|^p w \\
 &\quad + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n}) - R_0(f\chi_{\tilde{Q}_n})|^p w = I + II + III
 \end{aligned}$$

- I: Estimación de tamaño del núcleo

Localización

$$\begin{aligned}
 \int |\mathcal{R}f|^p w &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}f|^p w \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n}) + \mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n^c}) \pm R_0(f\chi_{\tilde{Q}_n})|^p w \\
 &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n^c})|^p w + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |R_0(f\chi_{\tilde{Q}_n})|^p w \\
 &\quad + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n}) - R_0(f\chi_{\tilde{Q}_n})|^p w = I + II + III
 \end{aligned}$$

- I: Estimación de tamaño del núcleo
- II: Resultado para R_0 (C. Perez)

Localización

$$\begin{aligned}
 \int |\mathcal{R}f|^p w &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}f|^p w \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n}) + \mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n^c}) \pm R_0(f\chi_{\tilde{Q}_n})|^p w \\
 &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n^c})|^p w + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |R_0(f\chi_{\tilde{Q}_n})|^p w \\
 &\quad + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f\chi_{\tilde{Q}_n}) - R_0(f\chi_{\tilde{Q}_n})|^p w = I + II + III
 \end{aligned}$$

- ▶ I: Estimación de tamaño del núcleo
- ▶ II: Resultado para R_0 (C. Perez)
- ▶ III: Comparación

I - Maximales asociadas a $\mathcal{L}$

Para $\theta \geq 0$ se define

$$M^\theta f(x) = \sup_{B(x_0, r) \ni x} \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\theta} \frac{1}{|B|} \int_B |f|$$

I - Maximales asociadas a $\mathcal{L}$

Para $\theta \geq 0$ se define

$$M^\theta f(x) = \sup_{B(x_0, r) \ni x} \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\theta} \frac{1}{|B|} \int_B |f|$$

$M^\theta \ll M$ para bolas grandes

I - Maximales asociadas a $\mathcal{L}$

Para $\theta \geq 0$ se define

$$M^\theta f(x) = \sup_{B(x_0, r) \ni x} \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\theta} \frac{1}{|B|} \int_B |f|$$

$M^\theta \ll M$ para bolas grandes

$w \in A_p^{\rho, \infty}$ si y sólo si existe θ tal que M^θ es acotado en $L^p(w)$
[BCH, 2013]

I - Maximales asociadas a $\mathcal{L}$

Para $\theta \geq 0$ se define

$$M^\theta f(x) = \sup_{B(x_0, r) \ni x} \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{\rho(x_0)}\right)^\theta} \frac{1}{|B|} \int_B |f|$$

$M^\theta \ll M$ para bolas grandes

$w \in A_p^{\rho, \infty}$ si y sólo si existe θ tal que M^θ es acotado en $L^p(w)$
[BCH, 2013]

El decaimiento extra en las estimaciones de tamaño permite obtener

$$I = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f \chi_{\tilde{Q}_n^c})|^p w \leq C \int |f|^p M^\sigma(w)$$

II - Resultado clásico localizado

Para $f \in L^1_{loc}$ se define

$$M^{loc}f(x) = \sup_{\substack{B=B(x_0,r): r \leq \rho(x_0) \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B |f|$$

II - Resultado clásico localizado

Para $f \in L^1_{loc}$ se define

$$M^{loc}f(x) = \sup_{\substack{B=B(x_0,r): r \leq \rho(x_0) \\ B \ni x}} \frac{1}{|B|} \int_B |f|$$

El resultado para integrales singulares de CZ nos permite obtener

$$\|f\|_p^p = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |R_0(f \chi_{\tilde{Q}_n})|^p w \leq C \int |f|^p M_\phi^{loc} w$$

III - Comparación

Para $\mathcal{R}$, si $q \geq d$ tenemos

$$|\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^d} \left(\frac{|x - y|}{\rho(x)} \right)^{1-d/q}.$$

III - Comparación

Para $\mathcal{R}$, si $q \geq d$ tenemos

$$|\mathcal{K}(x, y) - K_0(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^d} \left(\frac{|x - y|}{\rho(x)} \right)^{1-d/q}.$$

Esta estimación de comparación nos permite obtener

$$III = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{Q_n} |\mathcal{R}(f \chi_{\tilde{Q}_n}) - R_0(f \chi_{\tilde{Q}_n})|^p w \leq \int |f(y)|^p M^{loc} w$$

Resultados para $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_2$

- Si $V \in RH_q$ con $q \geq d$ (**caso bueno**), para $1 < p < \infty$

$$\int |\mathcal{R}f|^p w \leq C \int |f|^p (M^\theta + M_\phi^{loc}) w$$

Resultados para $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_2$

- Si $V \in RH_q$ con $q \geq d$ (**caso bueno**), para $1 < p < \infty$

$$\int |\mathcal{R}f|^p w \leq C \int |f|^p (M^\theta + M_\phi^{loc}) w$$

- Si $V \in RH_q$ con $d/2 \leq q < d$ (**caso malo**), para $p < s$ con $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$

$$\int |\mathcal{R}f|^p w \leq C \int |f|^p M_{(s/p)'}^\theta w$$

Resultados para $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_2$

- Si $V \in RH_q$ con $q \geq d$ (**caso bueno**), para $1 < p < \infty$

$$\int |\mathcal{R}f|^p w \leq C \int |f|^p (M^\theta + M_\phi^{loc}) w$$

- Si $V \in RH_q$ con $d/2 \leq q < d$ (**caso malo**), para $p < s$ con $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$

$$\int |\mathcal{R}f|^p w \leq C \int |f|^p M_{(s/p)'}^\theta w$$

- Si $V \in RH_q$ con $d/2 \leq q$, para $p < q$

$$\int |\mathcal{R}_2 f|^p w \leq C \int |f|^p M_{(q/p)'}^\theta w$$

Resultados para $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{R}_2^*$

- Si $V \in RH_q$ con $q \geq d$ (**caso bueno**), para $1 < p < \infty$

$$\int |\mathcal{R}^* f|^p w \leq C \int |f|^p (M^\theta + M_\phi^{loc}) w$$

Resultados para $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{R}_2^*$

- Si $V \in RH_q$ con $q \geq d$ (**caso bueno**), para $1 < p < \infty$

$$\int |\mathcal{R}^* f|^p w \leq C \int |f|^p (M^\theta + M_\phi^{loc}) w$$

- Si $V \in RH_q$ con $d/2 \leq q < d$ (**caso malo**), para $p > s'$ con $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$

$$\int |\mathcal{R}^* f|^p w \leq C \int |f|^p (M^\theta + M_\phi^{loc}) w$$

Resultados para $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{R}_2^*$

- Si $V \in RH_q$ con $q \geq d$ (**caso bueno**), para $1 < p < \infty$

$$\int |\mathcal{R}^* f|^p w \leq C \int |f|^p (M^\theta + M_\phi^{loc}) w$$

- Si $V \in RH_q$ con $d/2 \leq q < d$ (**caso malo**), para $p > s'$ con $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$

$$\int |\mathcal{R}^* f|^p w \leq C \int |f|^p (M^\theta + M_\phi^{loc}) w$$

- Si $V \in RH_q$ con $d/2 \leq q$, para $p > q'$

$$\int |\mathcal{R}_2^* f|^p w \leq C \int |f|^p (M^\theta + M_\phi^{loc}) w$$

Trabajos en curso

- Tomar $w = \chi_B$ para una bola B crítica

$$\int |Tf|^p \chi_B \leq C \int |f|^p \mathcal{M}(\chi_B).$$

Trabajos en curso

- Tomar $w = \chi_B$ para una bola B crítica

$$\int |Tf|^p \chi_B \leq C \int |f|^p \mathcal{M}(\chi_B).$$

- Con la desigualdad

$$\int |Tf|^p w \leq C \int |f|^p \mathcal{M}w$$

se puede obtener

$$\int |T^*f|^{p'} \mathcal{M}w \leq C \int |f|^{p'} w^{1-p'}$$

Trabajos en curso

- Tomar $w = \chi_B$ para una bola B crítica

$$\int |Tf|^p \chi_B \leq C \int |f|^p \mathcal{M}(\chi_B).$$

- Con la desigualdad

$$\int |Tf|^p w \leq C \int |f|^p \mathcal{M}w$$

se puede obtener

$$\int |T^*f|^{p'} \mathcal{M}w \leq C \int |f|^{p'} w^{1-p'}$$

- Estudiar *pares de pesos factorizados*
 $(u, v) = (w_1(M_\psi w_2)^{1-p}, (M_\phi w_1)w_2^{1-p})$

Gracias!